Aufgabe 1

Wie dimensioniert man den rechteckigen Querschnitt $A = a \cdot b$ mit $a \geq 0; b \geq 0$ eines Rohres mit vorgegebener Wandstärke, wenn der Materialverbrauch (für die Wandung) möglichst gering, die Querschnittsfläche dabei aber möglichst groß sein soll (mit Berechnung)?

Was bedeutet die in der Berechnung auftretende negative Lösung?

Aufgabe 2

Welche der folgenden Funktionen lassen sich ableiten? Bestimmen Sie die erste Ableitung, sofern möglich.

a)

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 2x + 1}; \qquad x \geq 0$$

b)

$$f(x) = 12e^x$$

c)

$$f(x) = e^{12x}$$

d)

$$f(x) = e^{12 \cdot \sin(x)}$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie näherungsweise den Wert der Quadratwurzeln $\sqrt{4,2}$ und $\sqrt{4,4}$ (die Beschränkung auf den positiven Ast genügt natürlich). Dazu kann die geschickt gewählte Funktion $f(x) = \sqrt{4 + x}$ bis zum dritten Term in eine Potenzreihe um $x = 0$ entwickelt werden.

Aufgabe 4

Gegeben sei die Relation

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+2} \;\; (x \in \mathbb{R}).$$

Handelt es sich um eine Funktion? Untersuchen Sie $f(x)$ auf Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, eventuelle Symmetrie und Krümmungsverhalten (ohne dritte Ableitung - die Relation besitzt keine Sattelstellen). Wie verhält sich $f(x)$ für große und keine Variablenwerte?

Skizzieren Sie die Funktion mit Hilfe der gefundenen Werte im Intervall $I = [-5; 5]$.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin(x)}$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$$

Aufgabe 6

(Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^n, \;\; n \in \mathbb{N}, \; x \in \mathbb{R}$. Die Produktregel der Ableitung ($(u \cdot v)' = u' \cdot v + v \cdot u'$) wird als bekannt vorausgesetzt.

a) Für welche $n > 0$ ist $f(x)$ differenzierbar?

b) Berechnen Sie die erste Ableitung für $n = 1$ direkt über den Grenzwert des Differenzenquotienten.

c) Berechnen Sie die erste Ableitung von x^2, x^3 und x^4 mithilfe der Produktregel.

d) Man erkennt die Ableitungsregel $(x^n)' = n \cdot (x^{n-1})$. Beweisen Sie, dass diese Regel für alle ganzzahligen $n \geq 1$ gilt.