Aufgabe 1

(9 Punkte) Gegeben ist die Relation

$$r(x) = \frac{1}{|3x-1|}$$

mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$.

(a) Handelt es sich um eine Funktion? Schreiben Sie $r(x)$ in betragsfreier Form und untersuchen Sie die Relation auf Symmetrie.

(b) Untersuchen Sie, ob die zugehörige Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } a_n = \frac{1}{|3n-1|}$$

einen Grenzwert besitzt

(c) Wie verhält sich $r(x)$ für große/kleine Variablenwerte?

(d) Skizzieren Sie $r(x)$ mit Definitionsbereich $D = [-1; 5]$.

Aufgabe 2

(9 Punkte) Lösen bzw. berechnen Sie

a) die Gleichung

$$x^3 - \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} = 0$$

b)

$$\prod_{i=1}^{4} i + \sum_{k=0}^{4} k + \sum_{l=1}^{3} 2$$

c)

$$4! + \sum_{k=0}^{3} (2k+1)$$

Aufgabe 3

(6 Punkte) Arno Nym verhandelt mit seiner Oma Mira Nym (geborene Bellenbaum) über sein Taschengeld. Oma Mira bietet eine Einmalzahlung von 30,- und die Zahlung von 10,- bei jedem weiteren Besuch. Arno hätte gern sofort 0,50, beim nächsten Besuch 1,- gefolgt von 1,50 beim übernächsten Besuch, also bei jedem Besuch eine Steigerung um -,50.

Wieviele Besuche der Oma müssen vergehen, bis Arno gegenüber der Version seiner Oma gewinnt?

Aufgabe 4

(5 Punkte)
Berechnen Sie die komplexe Zahl $\sin(i)$.

Aufgabe 5

(14 Punkte) Eine komplexe Zahl z_1 wird in der Gaußschen Zahlenebene durch den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und die Länge $r = 2\sqrt{2}$ dargestellt
$(\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}})$.

a) Skizzieren Sie die Zahl in der Gauß-Ebene

b) Stellen Sie die Zahl in der kartesischen Form als $z_1 = a + i \cdot b$ dar

c) Wie lautet der Betrag $|z_1|$ und die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z_1}$ zu z_1?

d) Gegeben sei eine weitere Zahl $z_2 = 1 + 2i$. Berechnen Sie $z_1 \cdot z_2$ und den Quotienten z_2/z_1.

Aufgabe 6

(7 Punkte)
Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Beziehung

$$\sum_{k=1}^{n} k^1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

für alle $n \in \mathbb{N}; n > 0$ erfüllt ist.

Aufgabe 7

(5 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 8a + 16x & x < 2 \\ a^2(x+2) & x \geq 2 \end{cases}$$

Bestimmen Sie den Parameter a so, dass die Funktion in $x = 2$ keine Lücke hat.