Aufgabe 1

Wie dimensioniert man den rechteckigen Querschnitt $A = a \cdot b$ eines Rohres, so dass der Materialverbrauch (für die Wandung) möglichst gering ist (mit Berechnung)?

Was bedeutet die negative Lösung? (6 Punkte)

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die durch die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + \sin x - x^2 \cos x}{2}$$

gegebene Kurve im Punkt $P = (0; 0)$. Geben Sie das Mac Laurinsche Polynom bis $n = 1$ an. (7 Punkte)

Aufgabe 3

Welche der folgenden Funktionen sind differenzierbar (Begründung)? Bestimmen Sie für die differenzierbaren Funktionen die Ableitung. (12 Punkte)

a) $e^{3x} \cdot 2x$

b) $e^{x^3} \cdot 2x^2$

c) $\sqrt{x^2 + 3}$

d) $x \cdot \ln(x)$, $x > 0$

e) $e^{\cos(2x)}$

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x^2 - x^3 (x \in \mathbb{R})$. Untersuchen Sie $f(x)$ auf Nullstellen, Extrema, Wendepunkte und Krümmungsverhalten. Wie verhält sich die Funktion für $x \to \pm\infty$?

Skizzieren Sie die Funktion mit Hilfe der gefundenen Werte im Intervall $I = [-2; 4]$. (14 Punkte)

Aufgabe 5

Bestimmen Sie näherungsweise den Wert

$$\frac{\sqrt{2,1}}{\sqrt{2}},$$

indem Sie die 'krumme' Wurzel im Zähler durch ein Taylorpolynom $T_1(x)$ ausdrücken.

Wie lautet der dritte Term der Entwicklung? Schätzen Sie, ob er das Ergebnis merklich beeinflussen kann. (11 Punkte)

Aufgabe 6

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für die Funktion $f(x) = e^x \cdot x$ die Beziehung

$$f^{(n)}(x) = f(x) + e^x \cdot n$$

für die n-te Ableitung gilt. (5 Punkte)