Hilfsformeln

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln \mid x \mid + C$$

$$a \cdot \ln(x) = \ln(x^a)$$

Fourierkoeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Additionstheorem:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Polarkoordinaten: r, φ mit

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi; \quad dA = r \cdot dr \cdot d\varphi$$

Aufgabe 1

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\int x \cdot \sin(x)dx$

(b) $2 \cdot \int \frac{1}{(x^2-1)}dx$

(c) $\int x^2 \ln(2x)dx$

(d) $\int \ln(x)dx$ (Hinweis: $\ln(x) = 1 \cdot \ln(x)$)

Aufgabe 2

Gegeben sei ein Bereich (A) : $y \geq 0;\ 2 \leq x^2 + y^2 < 4$. Skizzieren Sie den Bereich und berechnen Sie die Fläche A über ein Doppelintegral

$$A = \iint_{(A)} dA; \quad y \geq 0; 2 \leq x^2 + y^2 < 4.$$

Welche Art von Koordinaten sind sinnvoll? Warum?

Aufgabe 3

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0, \qquad x > 0$$

(a) Um was für eine Differentialgleichung handelt es sich?

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = x \ln x$, $(x > 0)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.

(c) ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{x}$ ebenfalls eine Lösung?

Aufgabe 4

Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = y^2 \cdot (sinx + 1)$$

Aufgabe 5

Lösen Sie das Anfangswertproblem mit der inhomogene DGL 1.Ordnung

$$y'(x) + 2y(y) = e^{-x};\ y(0) = 1$$

durch Variation der Konstanten.

Aufgabe 6

Um welche Art von Differentialgleichungen handelt es sich bei den folgenden zwei Beispielen:

$$y' + 2y - 3x + \sin x = 0 \tag{1}$$
$$y'' = 4x^2 \tag{2}$$

Gleichung	(1)	(2)
linear	□	□
nicht-linear	□	□
homogen	□	□
inhomogen	□	□
Ordnung	___	___

Aufgabe 7

Die Funktion $f(x) = 6,25$ kann wegen $f(x) = f(x + 2\pi)$ als 2π-periodisch betrachtet werden. Sie genügt außerdem den Dirichletschen Bedingungen und kann damit in eine Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)]$$

entwickelt werden.
Geben Sie die Fourier-Koeffizienten a_0, a_n und b_n an.

Aufgabe 8

Welche der folgenden Funktionen sind periodisch? Geben Sie, wenn möglich, das Periodenintervall an

a) $f(x) = \cos(x + 1)$

b) $f(x) = x \cdot \cos(5x)$

c) $\sin^2(x) + \cos^2(x) - 2$