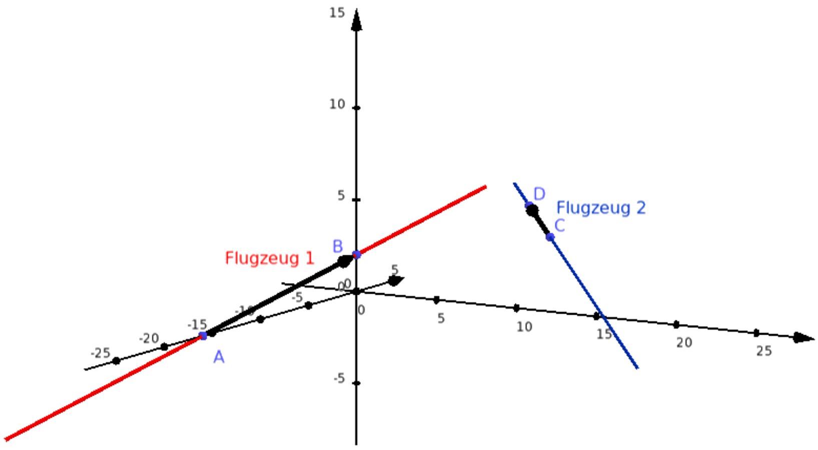
Mathematik I
Übungsblatt 3: Lösungen

Aufgabe 6



Die Geradengleichungen lassen sich vektoriell über die Aufpunkte A, C und die beiden Richtungsvektoren $\vec{AB}$ und $\vec{CD}$ darstellen. Es gilt (wenn s und t die verstrichene Zeit in Minuten darstellt)

$$g_1 : \vec{x} = r(\vec{A}) + \frac{t}{4}(r(\vec{B}) - r(\vec{A})) = \begin{pmatrix} 0 \\ -16 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$g_2 : \vec{x} = r(\vec{C}) + \frac{s}{2}(r(\vec{D}) - r(\vec{C})) = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Flugbahnen schneiden sich, wenn sie einen gemeinsamen Punkt besitzen, also wenn

$$\begin{pmatrix}0\\-16\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\4\\1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\0\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}$$

Es handelt sich um ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccrc} 0 & +0t & = & 12 & -3s \\ -16 & +4t & = & 0 & +4s \\ 0 & +\frac{1}{2}t & = & 4 & +0s \end{array}$$

Die erste Zeile liefert

$$12-3s=0 \quad \Rightarrow \quad s=4,$$

die dritte Zeile

$$\frac{t}{2}=4 \quad \Rightarrow \quad t=8,$$

eingesetzt in die zweite Zeile

$$-16+4\cdot 8=0+4\cdot 4 \quad \Rightarrow \quad 16=16.$$

Die Flugbahnen kreuzen sich im Punkt

$$S(0+8\cdot 0;-16+8\cdot 4;0+8/2)=S(0;16;4).$$

Ob sich die beiden Flugzeuge treffen, lässt sich herausfinden, wenn ausgehend von derselben Startzeit $t=0$ um 9:06 Uhr und mit gleichen Zeitschritten t in Minuten gerechnet wird. Die Flugbahn g_1 ist bereits passend angegeben, das zweite Flugzeug befindet sich zur Zeit $t=0$ bei (der Parameter ist $s=-3$)

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}12\\0\\4\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\-12\\4\end{pmatrix},$$

die Bahn ist also

$$g_2:\vec{x}=\begin{pmatrix}21\\-12\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}.$$

Gleichsetzen von g_1 und g_2 liefert das Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccrc} 0 & +t\cdot 0 & = & 21 & -3t \\ -16 & +4t & = & -12 & +4t \\ 0 & +t/2 & = & 4 & +t\cdot 0 \end{array}$$

Die zweite Zeile $-16+4t=-12+4t$ zeigt sofort, dass das LGS keine Lösung besitzt. Das ist gut für die Passagiere - die Flugzeuge treffen sich nicht.