Vollständige Induktion

November 2011

Die vollständige Induktion (oft auch schlicht als Induktion bezeichnet) ist eine mathematische Methode, nach der eine Aussage für alle natürlichen Zahlen ($n \in \mathbb{N}$) bewiesen wird. Da es sich dabei um unendlich viele Zahlen handelt, kann ein solcher Beweis natürlich nicht für alle Einzelfälle durchgeführt werden. Man führt ihn daher in zwei Etappen durch, als

i) Induktionsanfang für eine kleinste Zahl (oft 1 oder 0) und als

ii) Induktionsschritt, der aus der Aussage für eine variable Zahl die entsprechende Aussage für die *darauf folgende* Zahl logisch ableitet.

Das Verfahren ist von grundlegender Bedeutung für die Arithmetik und Mengenlehre und damit für alle Gebiete der Mathematik.

Richard Dedekind[1] hat die vollständige Induktion folgendermaßen definiert:

vollständige Induktion

> *Um zu beweisen, dass ein Satz für alle natürlichen Zahlen $n \geq m$ gilt, genügt es zu zeigen, dass er für $n = m$ gilt und dass aus der Gültigkeit des Satzes für eine Zahl $n \geq m$ stets seine Gültigkeit auch für die folgende Zahl $n + 1$ folgt.*

Das Beweisschema der vollständigen Induktion kann didaktisch etwas ausführlicher formuliert werden:

> *Soll die Formel $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq m$ bewiesen werden, dann genügen dazu zwei Beweisschritte:*

[1] Julius Wilhelm Richard Dedekind 1831-1916, deutscher Mathematiker

i) der Induktionsanfang: der Beweis von $A(n_0)$ mit einem beliebigen, aber festen Wert $n_0 \in \mathbb{N}$

ii) der Induktionsschritt: der Beweis der Induktionsbehauptung $A(n+1)$ mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung $A(n)$ und $n \geq m$.

Oft wird der Einfachheit halber $n_0 = 0$ oder $n_0 = 1$ gewählt. In spezielleren Fällen kann jedoch $m > 1$ sein.

Die vollständige Induktion kann aus Axiomen für die natürlichen Zahlen hergeleitet werden. Am bekanntesten ist vermutlich die Ableitung aus dem fünften Peano[2]-Axiom, dem sogenannten Induktionsaxiom:

> *Ist 0 ein Element von K und ist mit n aus K stets auch $n+1$ aus K, dann ist $\mathbb{N}$ eine Teilmenge von K.*

Wählt man in diesem Axiom für K die Menge aller natürlichen Zahlen n, die die Aussage $A(n)$ erfüllen, so ergibt sich die vollständige Induktion mit Induktionsanfang $A(0)$.

Beispiel: für vollständige Induktion - die Summe ungerader Zahlen (Maurolicus 1575)

Die schrittweise Berechnung der Summe der ersten n ungeraden Zahlen legt die Vermutung nahe: Die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis $2n-1$ ist gleich dem Quadrat von n, also

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

Formuliert man die Summe aus, so ergeben sich für einige n die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+3 &= 4 \\ 1+3+5 &= 9 \\ 1+3+5+7 &= 16 \end{aligned}$$

[2] Giuseppe Peano 1858-1932, italienischer Mathematiker

Diese Beziehung wurde von Maurolicus[3] 1575 mit vollständiger Induktion bewiesen. Ein Beweis mit heute geläufigen Rechenregeln liest sich folgendermaßen:

i) Der Induktionsanfang mit $n_0 = 1$ gilt wegen

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2-1 = 1^2.$$

ii) Beim Induktionsschritt ist zu zeigen: Wenn

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \text{ , dann gilt } \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$$

Wir führen den Induktionsschritt aus:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) \\ &\overset{\text{n. Vorr.}}{=} n^2 + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 2 - 1 \\ &= (n+1)^2.\end{aligned}$$

Die Induktionsvorraussetzung wurde dabei in der zweiten Umformung benutzt, um die Summe zu ersetzen.