Mathe 2

Corona - Notversion

M. Oettinger

28.05.2020

Das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 5 \end{aligned}$$

mit der Lösung $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ kann über die Matrix A und den Vektor b in eine Matrixgleichung $Ax = b$ umgeschrieben werden:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Zu $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ ist $Ax \in \mathbb{R}^m$ definiert durch

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + \dots & +a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + \dots & +a_{2n}x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & + \dots & +a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Beispiel:

Das obige Beispiel für ein lineares Gleichungssystem wird durch

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

beschrieben, die bereits geratene Lösung durch

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 0 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Definition: transponierte Matrix

Die transponierte Matrix A^T (auch gespiegelte oder gestürzte Matrix) ist diejenige Matrix, die durch Vertauschen der Rollen von Zeilen und Spalten der Matrix A entsteht.

Beispiel:

Die Transponierte Matrix zu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ ist } A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Anmerkungen

- Der Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ ist ein Spaltenvektor ($n \times 1$-Matrix), der transponierte Vektor $x^T \in \mathbb{R}^{1\times n}$ ist dann ein Zeilenvektor, zu

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ ist } x^T = (1 \;\; 2 \;\; 3)$$

- Das Skalarprodukt $x \cdot y$ entspricht der Matrix-Multiplikation $x^T \cdot y$:

$$\text{Für } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist}$$

$$x^T \cdot y = (1 \;\; 2 \;\; 3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

- Dabei ist aber (dyadisches Produkt)

$$x \cdot y^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

  (Das dyadische Produkt kann z.B. für Faltungen von Funktionen genutzt werden)

Definition:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt quadratische Matrix

Eine quadratische Matrix mit der Eigenschaft $A^T = A$ heißt symmetrisch.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ heißt Diagonalmatrix,}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ heißt Einheitsmatrix}$$

Definition:

Die Matrix

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

heißt Nullmatrix (analog zum Nullvektor $\vec{0}$).

Anmerkungen:

- Eine symmetrische Matrix ist symmetrisch zur Hauptdiagonalen
- Die Einheitsmatrix E wird oft auch als I oder $I_{n \times n}$ (für Identität) bezeichnet.

Quadratische Matrizen

Satz:

Ist

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & d_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix und A eine Matrix (mit passenden Dimensionen), so gilt:

- $D \cdot A$ ergibt sich aus A durch Multiplikation der k-ten Zeile von A mit d_{kk}.
- $A \cdot D$ ergibt sich aus A durch Multiplikation der k-ten Spalte von$A$ mit d_{kk}.

Matrixprodukte mit einer Diagonalmatrix sind besonders einfach.

Beispiel:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ ist eine Diagonalmatrix.}$$

$$D \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definition:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt regulär oder invertierbar

$$\Leftrightarrow \text{ es gibt eine Matrix } A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ mit } A \cdot A^{-1} = I.$$

Ansonsten heißt die Matrix singulär.

$A \cdot A^{-1} = I$ $\quad \Rightarrow$ Multiplikation mit der inversen Matrix A^{-1} entspricht der Division durch A.

Quadratische Matrizen

Beispiel:

Ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ regulär? Falls ja, existiert ein $X = (x_{ij})$ mit $A \cdot X = I$, also

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrixgleichung entspricht drei Gleichungssystemen:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A \cdot \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A \cdot \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

die sich simultan lösen lassen.

Beispiel:

$$\begin{array}{c} I \\ II \\ III \\ IV \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ -2 \cdot I \end{array}$$

$$\begin{array}{c} I \\ II \\ III \\ IV \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} -2 \cdot II - III \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} I \\ II \\ III \\ IV \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Das Ergebnis entspricht $I \cdot X = X$. Also ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkungen:

- Das *Gauß-Jordan-Verfahren*) kann allgemein zur Berechnung einer inversen Matrix zu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ benutzt werden.
- A ist invertierbar
  - $\Leftrightarrow$ A lässt sich durch elementare Zeilenoperationen in die Form einer Einheitsmatrix bringen
  - $\Leftrightarrow$ A enthält keine 0-Zeile

Beispiel:

Gesucht ist die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 1 \\ & -x_2 & & = 2 \\ 2x_1 & +4x_2 & +3x_3 & = 1 \end{array}$$

oder in Matrix-Schreibweise $Ax = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel:

Mit der aus dem vorigen Beispiel bekannten inversen Matrix ist die Lösung $A^{-1} \cdot Ax = I \cdot x = x = A^{-1} \cdot b$:

$$x = A^{-1}b \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Satz: invertierbare Matrizen

1. Ist A invertierbar, so auch A^{-1} und es gilt $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Ist A invertierbar, so auch A^T und es gilt $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
3. Sind A und B invertierbar, so auch $A \cdot B$ und es ist $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Anmerkungen dazu:

- Aus $A^{-1} \cdot A = I$ folgt
$$I = I^T = (A^{-1} \cdot A)^T = A^T \cdot (A^{-1})^T,$$
also $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- Sind A und B invertierbar, so gilt
$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I,$$
also $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Definition: (Determinante)

Durch die *Determinante* wird einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Zahl $\det A \in \mathbb{R}$ zugeordnet, wobei gilt:

i) Hat die Matrix A Dreiecksgestalt, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} * & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & * \end{pmatrix} \text{ oder } A = \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & * \end{pmatrix},$$

so ist $\det A$ das Produkt der Diagonalelemente

ii) $\det A$ bleibt bei Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile unverändert

iii) $\det A$ wechselt beim Vertauschen von Zeilen das Vorzeichen

Determinanten

Für den zweidimensionalen Fall $A = a_{ij}$ schreibt man oft auch

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Durch Zeilen-/Spaltenoperationen kann die Determinante einer Matrix berechnet werden:

- Der Wert der Determinanten ändert sich nicht, wenn man Vielfache einer Zeile (Spalte) zu anderen Zeilen (Spalten) addiert.
- Die Determinante ändert ihr Vorzeichen beim Vertauschen von Zeilen (Spalten)
- Die Determinante hat den Wert 0, wenn alle Elemente einer Zeile (Spalte) 0 sind oder zwei Zeilen (Spalten) gleich oder proportional sind.

Determinanten

Eine zweireihige Determinante wird durch

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1}$$

berechnet. Im dreidimensionalen Fall gilt

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{2}$$

Regel von Sarrus

Die Regel von Sarrus ist ein Schema, das die Berechnung von dreireihigen Determinanten ermöglicht: man schreibt die zwei ersten Spalten noch einmal auf die Rechte Seite neben die Determinante.

Dadurch erhält man gedanklich drei 'Hauptdiagonalen' von links oben nach rechts unten und drei 'Nebendiagonalen' von rechts oben nach links unten. Man berechnet die Produkte der Elemente in jeder der Hauptdiagonalen und addiert sie, davon werden die Produkte der Elemente in den Nebendiagonalen abgezogen.

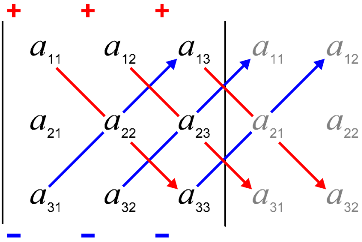

Abbildung: Eisenbahn%s / CC BY-SA (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0)

Beispiel: Determinante

Zur Berechnung der Determinanten links kopiert man die beiden ersten Spalten rechts neben die Determinante

$$\left|\begin{array}{ccc} 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 2 & 6 \\ -1 & -3 \\ 0 & 3 \end{array}.$$

Jetzt werden die Zahlen in den gedachten Hauptdiagonalen multipliziert und die Produkte summiert. Genauso werden die Zahlen der Nebendiagonalen multipliziert und die Produkte subtrahiert:

$$= 2 \cdot (-3) \cdot 3 + 6 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \cdot 3 - 2 \cdot (-3) \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 3 - 6 \cdot (-1) \cdot 3$$
$$= -18 - 6 - (-18) = -6$$

Entwicklung nach Zeilen/Spalten

Zur Berechnung von Determinanten können sie in Unterdeterminanten zerlegt werden. Eine dreireihige Determinante lässt sich beispielsweise durch zweireihige Unterdeterminanten berechnen. Entwicklung der Determinante

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

nach der ersten Spalte:

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach Zeilen/Spalten

Eine Determinante kann nach einer beliebigen Spalte oder Zeile entwickelt werden (Laplacescher Entwicklungssatz):

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \det A_{ij} : \text{ Entw. nach Spalte j} \tag{3}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \det A_{ij} : \text{ Entw. nach Zeile i} \tag{4}$$

Die Koeffizienten der gewählten Zeile oder Spalte werden mit wechselndem Vorzeichen mit Unterdeterminanten $\det A_{ij}$ multipliziert und die Ergebnisse addiert. Die Unterdeterminanten $\det A_{ij}$ entstehen aus $\det A$ durch Streichen der Zeile i und der Spalte j.

Entwicklung nach Zeilen/Spalten

Beispiel:

Berechnung einer Determinante durch Entwicklung nach einer Spalte/Zeile.

Die Zeile oder Spalte für die Entwicklung ist frei wählbar, sinnvoll sind Zeilen oder Spalten, die die Null enthalten!

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad +\tfrac{1}{2}\cdot \mathrm{I} \quad = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{(Spalte 1:)} \;\; = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (0 \cdot 3 - 1 \cdot 3) = -6$$

$$\text{(Zeile 2:)} \;\; = (-1) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (2 \cdot 3 - 6 \cdot 0) = -6$$

Die Cramersche Regel[1] ist eine Regel zur Lösung eines LGS. Sie ist oft bei theoretischen Betrachtungen linearer Gleichungssysteme hilfreich.

Satz: Cramersche Regel

(1) Ein lineares Gleichungssystem

$$A \cdot x = b$$

mit quadratischer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (es besitzt genausoviele Gleichungen wie Unbekannte) ist genau dann eindeutig lösbar, wenn gilt:

$$\det(A) \neq 0.$$

[1] benannt nach Gabriel Cramer (1704 - 1752), Genfer Mathematiker

Satz: Cramersche Regel

(2) Die Lösung ist dann eindeutig bestimmt durch

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \text{ für alle } i = 1 \dots n. \tag{5}$$

Die Matrix A_i erhält man aus der Koeffizientenmatrix A, indem die i-te Spalte der Matrix durch den Vektor b auf der rechten Seite des Gleichungssystems ersetzt wird.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Cramersche Regel

Beispiel: einfaches LGS

Das lineare Gleichungssystem 2.Ordnung

$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 6 \end{aligned}$$

besitzt die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array} \right).$$

Die Determinante der Matrix

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

ist ungleich 0, das Gleichungssystem ist also eindeutig lösbar.

Cramersche Regel

Beispiel: einfaches LGS

Die Lösung kann mit der Cramerschen Regel berechnet werden:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{-3} = 2.$$

Anwendung: Geometrie

Beispiel: Ebene und Gerade

Ein typisches Problem der linearen Algebra ist der Schnitt zwischen einer Ebene und einer Geraden:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Berechnet werden soll der Schnittpunkt von g und E (falls er existiert), der gemeinsame Punkt $\vec{x}_S$.

Anwendung: Geometrie

Beispiel: Ebene und Gerade

Gleichsetzen liefert

$$\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$$

Oder ausformuliert ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten

$$\begin{array}{cccccc} 0 & +s & +2t & = & 1 & +2\lambda \\ 3 & -s & +0 & = & 2 & -\lambda \\ 2 & +2s & -t & = & 1 & +3\lambda \end{array}$$

Anwendung: Geometrie

Beispiel: Ebene und Gerade

Das LGS $A \cdot x = b$ lautet in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

die erweiterte Koeffizientenmatrix kann in einem ersten Schritt vereinfacht werden (zur ersten Zeile I wird 2·Zeile III addiert):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -8 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

Falls das LGS eindeutig lösbar ist, besitzen Gerade und Ebene einen gemeinsamen Punkt.

Beispiel: Ebene und Gerade

Die Determinante der Matrix A kann nach der zweiten Spalte entwickelt werden:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & -8 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 + 0 + (-1)(-1) \begin{vmatrix} 5 & -8 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot (5 \cdot 1 - (-1)(-8)) = -3 \neq 0$$

Die Determinante $|A|$ ist ungleich Null, also ist das LGS eindeutig lösbar, die Gerade schneidet die Ebene.

Die Lösungen lassen sich aus den Determinanten $|A_i|$ berechnen (der Vektor b ersetzt die i-te Spalte der Matrix A)

Beispiel: Ebene und Gerade

$\det A_1$ kann nach der zweiten Spalte entwickelt werden:

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -8 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -8 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 8 = -9$$

Zur Berechnung von $\det A_2$ kann wieder umgeformt werden:

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -8 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -\mathrm{III} \\ -\mathrm{III} \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -3$$

Beispiel: Ebene und Gerade

$\det A_3$ kann wieder direkt nach der zweiten Spalte entwickelt werden:

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 1 = -6$$

Damit sind die drei Variablen festgelegt:

$$s = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-9}{-3} = 3; \qquad t = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-3}{-3} = 1;$$
$$\lambda = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-6}{-3} = 2$$

Beispiel: Ebene und Gerade

Der Schnittpunkt berechnet sich am einfachsten aus der Geradengleichung

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} \text{ mit } \lambda = 2 :$$

$$\vec{x}_S = \begin{pmatrix}1+2\cdot 2\\2+2\cdot(-1)\\1+2\cdot 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\0\\7\end{pmatrix}$$