Mathe 2

Corona - Notversion

M. Oettinger

16.04.2020

Steigung

Eine Gerade g (gegeben beispielsweise durch zwei Punkte und die Verbindungslinie) kann als Funktion $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ mit konstanter Steigung im zweidimensionalen Raum aufgefasst werden.

Die Steigung m der Geraden ist definiert als Änderung des Funktionswerts y bei Änderung der Variablen x

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

oder mit $y = g(x)$:

$$m = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \left(\text{kurz } \frac{\Delta g}{\Delta x} \right)$$

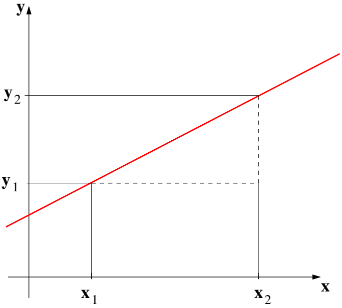


Abbildung: Steigung einer Geraden

Steigung

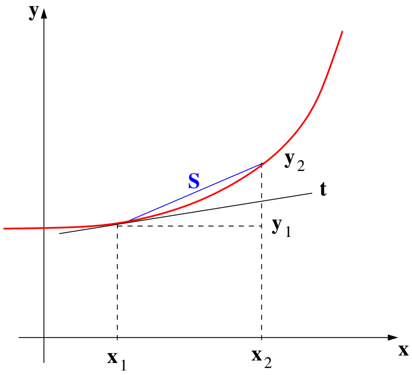


Abbildung: Steigung einer glatten Kurve.

Bei einer beliebigen, 'glatten' Funktion ist die Situation komplizierter: es lässt sich keine Steigung angeben. Die Funktion besitzt allgemein in jedem Punkt des Definitionsbereichs eine eigene Steigung.

Zur Berechnung sind *Sekanten* an die Kurve nötig.

Steigung

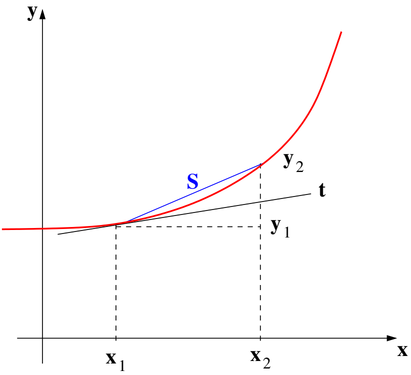


Abbildung: Steigung einer glatten Kurve.

$$m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ist Steigung der Sekanten S, der Grenzwert der Sekantensteigung

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

heißt Ableitung der Funktion im Punkt $P = (x_0; f(x_0))$. Sie entspricht der Steigung eines unendlich kleinen Kurvenstücks durch den Punkt $(x_0/f(x_0))$.

Definition: (Ableitung)

Sei f eine Funktion mit Definitionsbereich D und $x_0 \in D$. Dann heißt f differenzierbar in x_0

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existiert.}$$

Der Grenzwert wird dann als Ableitung $f'(x)$ im Punkt x_0 bezeichnet, der Ausdruck $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ heißt Differenzenquotient.

In vielen Fällen ist die gleichwertige Formulierung mit $x = x_0 + h$ günstig:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ableitung

- Die Definition der Ableitung über den Grenzwert gilt für reelle $D \subset \mathbb{R}$, aber auch für komplexe $D \subset \mathbb{C}$. Auch die Funktionswerte können im Komplexen liegen.
- Einfache Ableitungen sind mitHilfe des Grenzwerts direkt berechenbar
- Findet man einen allgemeinen Ausdruck für (gedanklich) alle $x_0 \in D$, schreibt man natürlich statt $f'(x_0)$ einfach $f'(x)$ für die Ableitung.

Berechnung von Ableitungen:

Beispiel: (komplexe Ableitungen)

$f : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}, x \longmapsto c$ mit $c \in \mathbb{C}$ und konstant.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

Wie erwartet verschwindet die Steigung (Änderung des Funktionswertes mit der Änderung der Variablen) im Falle einer Konstanten. Dies gilt natürlich auch im komplexen Fall.

Ableitungen

Beispiel: (komplexe Ableitungen)

$f : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}, x \longmapsto m \cdot x + c$ mit $m, c \in \mathbb{C}$ und konstant.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{m \cdot x - m \cdot x_0 + c - c}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} m \cdot \frac{x - x_0}{x - x_0} = m\end{aligned}$$

Auch das überrascht nicht: die Ableitung der Geraden ist die Steigung (die Konstante, die die Änderung der Funktionswerte mit einer Änderung der Variablenwerte verknüpft), die zusätzliche Konstante verschwindet.

Ableitungen

Beispiel: (komplexe Ableitungen)

$f : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}, x \longmapsto x^2.$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0 h + h^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2x_0 + h = 2x_0$$

Man sieht: $f(x) = x^2$ ist differenzierbar, die Ableitung ist $f'(x) = 2x$.

Ableitungen

Beispiel: (komplexe Ableitungen)

$f : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}, x \longmapsto x^3.$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3 - x_0^3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} 3x_0^2 + 3x_0 h + h^2 \\
&= 3x_0^2
\end{aligned}
$$

$f(x) = x^3$ ist differenzierbar, die Ableitung ist $f'(x) = 3x^2$.

Tangenten

Satz:

Ist die Funktion f differenzierbar in x_0, so wird durch

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \tag{1}$$

die Tangente an die Kurve an der Stelle x_0 beschrieben.

Beispiel:

$f(x) = x^2$, wir suchen die Tangente an die Kurve im Punkt $P(x_0 = 1; f(x_0) = 1)$:

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 1 + 2 \cdot 1^2 \cdot (x - 1)$$

Anmerkungen:

- Der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert, wenn $\lim_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0))$ existiert. Also gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f(x)$ muss stetig sein.

- Die Umkehrung gilt aber nicht unbedingt. Beispielsweise ist die Funktion $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}, x \longmapsto |x|$ stetig in ganz $\mathbb{R}$, insbesondere in $x_0 = 0$. Es ist aber bei $x_0 = 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ existiert nicht.}$$

$f(x) = |x|$ ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

- Im Alltag begegnet man der Ableitung häufig in Form der Geschwindigkeit als Änderung des Ortes in Abhängigkeit von Zeit. $s(t)$ beschreibt die zurückgelegte Strecke, die Geschwindigkeit (Änderung des Ortes) kann als Differenzenquotient

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1},$$

der die *mittlere Geschwindigkeit zwischen den Zeitpunkten* t_2 *und* t_1 *beschreibt, oder als Ableitung (die Momentangeschwindigkeit)*

$$\dot{s}(t_1) = v(t_1) = \lim_{t \to t_1} \frac{s(t) - s(t_1)}{t - t_1}$$

ausgedrückt werden.

Rechenregeln für die Ableitung

Satz:

Sind f und g differenzierbare Funktionen, so sind auch $f \pm g$ und $f \cdot g$ differenzierbar. Dabei gelten die Regeln:

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$
$$(\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f'$$

Rechenregeln für die Ableitung

Beispiel: Ableitungen

- die Funktion $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$. Die Ableitung ist

$$f'(x) = 2(x^2)' + 3(x)' - (2)' = 2 \cdot 2x + 3 \cdot 1 - 0$$

$$= 4x + 3$$

Produktregel

Ableitung einer Funktion der Form $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ mit den Ableitungen $u'(x)$ und $v'(x)$: allgemein ist

$$f'(x) = (u(x) \cdot v(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} + \underbrace{\frac{u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x} - \frac{u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x}}_{=0}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x} + \frac{u(x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x}$$

Produktregel

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} v(x+\Delta x)$$
$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} u(x)$$

$$\Rightarrow (u(x)v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

kurz

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Ableitung von x^n

Die Ableitung von Potenzen der Variable x ist

$$\begin{aligned}(x^0)' &= 0 = 0 \cdot x^{-1} \\ (x^1)' &= x' = 1 \cdot x^0 \\ (x^2)' &= 2 \cdot x = 2 \cdot x^1 \\ (x^3)' &= 3 \cdot x^2\end{aligned}$$

Vermutung: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.

Ableitung von x^n

Beweis über vollständige Induktion: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

i) Induktionsanfang mit $n_0 = 1$: bereits berechnet
$(x^1)' = 1 \cdot x^0$

ii) Induktionsschritt mit Voraussetzung $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$:

$$\begin{aligned}(x^{n+1})' &= (x \cdot x^n)' = x' \cdot x^n + x \cdot (x^n)' \\ &= 1 \cdot x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1} = 1 \cdot x^n + n \cdot x^n \\ &= (n+1)x^n\end{aligned}$$

Die Regel ist auch für gebrochene und negative Potenzen anwendbar.

Kettenregel

$g(x)$ und $f(x)$ sind differenzierbare Funktionen

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{[g(f(x)) - g(f(x_0))] \cdot (f(x) - f(x_0))}{(f(x) - f(x_0)) \cdot (x - x_0)} \\
&= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)
\end{aligned}
$$

Satz: (Kettenregel)

Die Verkettung zweier (oder mehrerer) Funktionen ist wieder differenzierbar. Im Falle zweier Funktionen f, g gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = \underbrace{g'(f(x_0))}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{\text{innere Ableitung}}$$

Beispiel:

Es sei $f : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}, x \longmapsto ax$ und $g : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}, x \longmapsto e^x$. Also ist $f'(x) = a$ und $g'(x) = e^x$ und

$$(g \circ f) = e^{ax}.$$

Damit folgt für die Ableitung

$$(g \circ f)' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = e^{ax} \cdot a.$$

Quotientenregel

Die Ableitung eines Quotienten von differenzierbaren Funktionen kann mit der Produkt- und der Kettenregel berechnet werden

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' &= \left(u(x)\frac{1}{v(x)}\right)' \\
&= u'(x)\frac{1}{v(x)} + u(x)\left(\frac{1}{v(x)}\right)' \\
&= \frac{u'(x)v(x)}{(v(x))^2} + u(x)(-1)\frac{1}{(v(x))^2}v'(x) \\
&= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}
\end{aligned}
$$

kurz

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Rechenregeln für die Ableitung

Satz: Ableitungsregeln

Sind f und g differenzierbare Funktionen, so sind auch $f \pm g$, $f \cdot g$, $\lambda \cdot f$, $f(g)$ und, falls $g \neq 0$, $\frac{f}{g}$ differenzierbar. Dabei gelten die Regeln:

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \tag{2}$$

$$(\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f' \tag{3}$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \text{ (Produktregel)} \tag{4}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \text{ (Quotientenregel)} \tag{5}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \text{ Kettenregel} \tag{6}$$

einige Ableitungen

Die Ableitung der Exponentialfunktion ist

$$f(x) = e^{ax} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a \cdot e^{ax}$$

Mit der imaginären Einheit i ergibt sich daraus insbesondere für $a = i$

$$\left(e^{ix}\right)' = i \cdot e^{ix} = i(\cos x + i \sin x) = i\cos x - \sin x.$$

Andererseits wissen wir, dass $(f \pm g)' = f' \pm g'$, also

$$\left(e^{ix}\right)' = (\cos x + i \sin x)' = (\cos x)' + i(\sin x)'.$$

Es gilt also $i \cos x - \sin x = (\cos x)' + i(\sin x)'$, der Vergleich von Imaginär- und Realteil liefert sofort

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad (\sin x)' = \cos x.$$

einige Ableitungen

Für die Ableitung des Tangens kann die Quotientenregel (5) benutzt werden:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$

$$= \frac{(sinx)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_{\text{mit } \sin^2 x + \cos^2 x = 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= 1 + \tan^2 x.$$

einige Ableitungen

Die Ableitung von Potenzfunktionen gelingt über den Logarithmus:
für $a > 0$ ist

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \cdot \ln a}, \text{ also}$$

$$(a^x)' = \left(e^{x \cdot \ln a}\right)' = e^{(\ln a) \cdot x} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

einige Ableitungen

Die Funktion $f(x) = \sin^2(x)$ kann in der Form $\sin x \cdot \sin x$ geschrieben werden und über die Produktregel abgeleitet werden:

$$(\sin x \cdot \sin x)' = \cos x \cdot \sin x + \sin x \cdot \cos x.$$

Genauso lässt sich aber natürlich auch die Kettenregel nutzen:

$$\begin{aligned}
f(x) = \sin x &\Rightarrow f'(x) = \cos x \\
g(x) = x^2 &\Rightarrow g'(x) = 2x. \\
g(f(x)) = (\sin x)^2 &\Rightarrow g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) \\
&= 2 \sin x \cdot \cos x.
\end{aligned}$$

Schreibweisen

Für die Ableitung

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

schreibt man kurz auch

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

Der untere Ausdruck ist kein herkömmlicher Quotient - es handelt sich um einen Differentialoperator (dx ist ein Differential).

Schreibweisen

Die Schreibweise hat den Vorteil, dass die Variable der Ableitung klar erkennbar ist.
Üblicherweise wird für eine örtliche Ableitung der Strich, für eine zeitliche Ableitung der Punkt verwendet:

$$f'(x,t) = \frac{d}{dx} f(x,t)$$
$$\dot{f}(x,t) = \frac{d}{dt} f(x,t)$$

Bei Ableitung von Fkt. mehrerer Variabler schreibt man

$$f'_x(x,y,z) = \frac{d}{dx} f(x,y,z)$$
$$f'_y(x,y,z) = \frac{d}{dy} f(x,y,z)$$

Definition: lokales Extremum:

Sei $f : D \longmapsto \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Dann hat f in x_0 ein
lokales Maximum $\Leftrightarrow$ es gibt eine Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ mit $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D$.

Analog: f hat in x_0 ein
lokales Minimum $\Leftrightarrow$ es gibt eine Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ mit $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D$.

x_0 wird dann als lokale Extremstelle bezeichnet.

Lokal bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Funktion f außerhalb der ε-umgebung noch weitere Extrema besitzen kann.

Satz:

Ist die Funktion $f :]a, b[\longmapsto \mathbb{R}$ differenzierbar, so gilt:
$x_0 \in]a, b[$ ist lokale Extremstelle $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Bemerkungen:

- Die Umkehrung des obigen Satzes gilt im allgemeinen nicht! Beispielsweise hat die Funktion $f :]-1, 1[\longmapsto \mathbb{R}, x \longmapsto x^3$ die Ableitung $f'(x) = 3x^2$ und damit $f'(0) = 0$, 0 ist aber keine Extremstelle von $f(x)$.
- Es ist wichtig, dass die untersuchte Stelle x_0 im Inneren des Intervalls liegt. Bei einer lokalen Extremstelle am Rand des Intervalls muss die Ableitung (einseitig!) nicht Null sein.

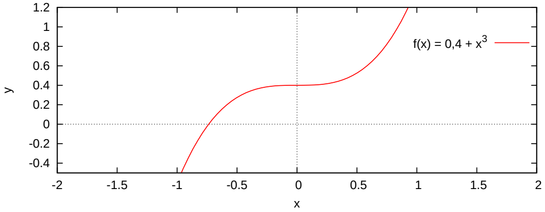
- Der Satz kann zur Berechnung von Maxima oder Minima benutzt werden: man berechnet die Nullstellen der Ableitung. Liegt eine Extremstelle im Inneren des Definitionsbereichs, so muss sie eine der Nullstellen sein.

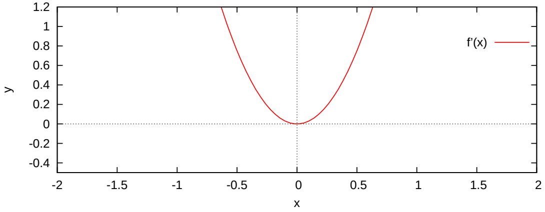
Satz:

Sei $f :]a,b[\longmapsto \mathbb{R}$ differenzierbar.

$$\text{Gilt } f'(x) \left\{ \begin{array}{c} > \\ \geq \\ \leq \\ < \end{array} \right\} 0 \text{ für } x \in]a,b[, \ \text{ so ist } f \left\{ \begin{array}{l} \text{streng monoton wachsend} \\ \text{monoton wachsend} \\ \text{monoton fallend} \\ \text{streng monoton fallend} \end{array} \right.$$

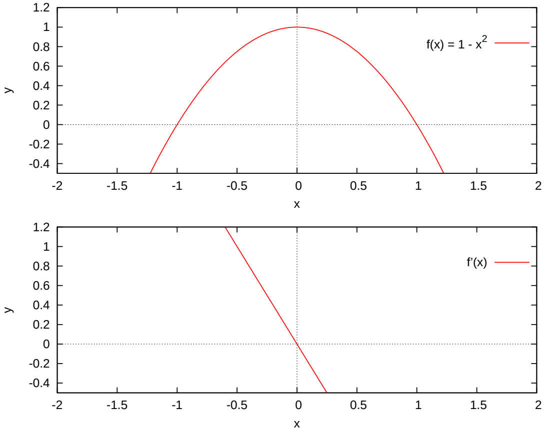
Höhere Ableitungen, Kurven





Man sieht am Beispiel $f :]-1,1[\longmapsto \mathbb{R}, x \longmapsto 0,4 + x^3$ sofort, dass auch aus strenger Monotonie nicht zwangsläufig folgt, dass $f'(x)$ stets größer oder kleiner Null ist.

Höhere Ableitungen, Kurven



Oben ist eine Funktion mit Extremstelle dargestellt. Man erkennt, dass das Vorzeichen der Ableitung $f'(x)$ bei einer Extremstelle wechselt. Bleibt das Vorzeichen der Ableitung gleich, hat die Funktion keine Extremstelle.

Definition:

Sei $f : D \longrightarrow K$ differenzierbar in D und $x_0 \in D$.
Ist $f' : D \longrightarrow K$ differenzierbar (in x_0), so heißt f zweimal differenzierbar (in x_0).

Man schreibt $f''(x_0) := (f')'(x_0)$.

Entsprechend spricht man von mehrfach (3-mal, ... , n-mal) differnzierbar und bezeichnet die n-te Ableitung mit $f^{(n)}$, speziell ist
$f^{(2)} = f'',\ f^{(1)} = f',\ f^{(0)} = f$.

Satz:

$f: \;]a,b[\longmapsto \mathbb{R}$ sei zweimal differenzierbar. Gilt für ein $x_0 \in \;]a,b[$, dass

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 0$, so hat f in x_0 ein lokales $\begin{matrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{matrix}$

Anmerkung:
Die Bedingung $f''(x) \neq 0$ ist für die Existenz eines lokalen Extremums hinreichend, aber nicht notwendig. Für $f(x) = x^4$ ist die zweite Ableitung an der Stelle $x_0 = 0$ Null, es handelt sich aber um ein lokales Extremum. In diesem Fall ist es sinnvoll, einen Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung zu untersuchen - wechselt die erste Ableitung $f'(x)$ in x_0 ihr Vorzeichen von $+$ nach $-$ hat die Funktion in x_0 ein Maximum.

Satz:

Sei $f :]a, b[\longmapsto \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar.

1. Ist $f''(x) \begin{array}{c} < \\ > \end{array} 0$ für alle $x \in]a, b[$, so ist

   $f(x)$ $\begin{array}{c} \text{rechtsgekrümmt (konkav)} \\ \text{linksgekrümmt (konvex)} \end{array}$.

2. Ist f sogar 3-mal stetig differenzierbar, $x_0 \in]a, b[$ mit $f''(x_0) = 0$ und $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, so ändert sich das Krümmungsverhalten in x_0. x_0 wird dann als Wendestelle bezeichnet.

Eine Wendestelle x_0 mit $f'(x_0) = 0$ wird als Sattelstelle bezeichnet (beispielsweise $f(x) = x^3, x_0 = 0$).

Die Kurvendiskussion liefert ein Bild einer gegebenen Funktion. Dazu bestimmt man möglichst viele Eigenschaften der Funktion:

- ggf. den maximalen Definitionsbereich,
- Symmetrieeigenschaften,
- die Nullstellen,
- die Extremstellen,
- die Wendepunkte,
- das Krümmungsverhalten,
- falls nötig Grenzwerte bei isolierten nicht definierten Stellen bzw. Grenzwerte am Rand des Definitionsbereichs.

Dait kann meist eine einfache Skizze der Funktion erstellt werden.

Kurvendiskussion

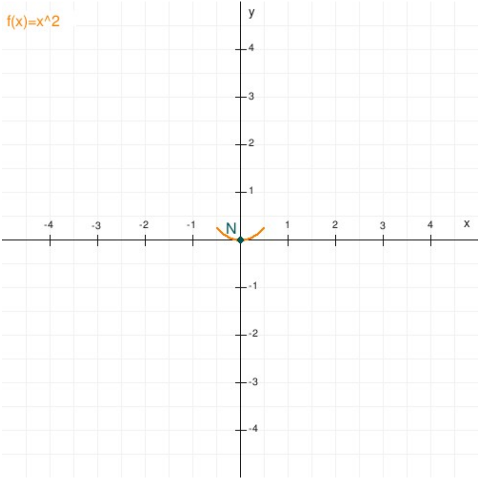
Beispiel: $f(x) = x^2$

Ein erstes einfaches Beispiel:

- Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$
- Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- Extremstellen: $f'(x) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
  $f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow f$ hat in x_0 ein lokales Minimum mit dem Funktionswert $f(0) = 0^2 = 0$.
- Wendepunkte: $f''(x) = 2 \neq 0$ für alle $x \in D \Rightarrow$ keine Wendepunkte.
- $f''(x) = 2 > 0$ für alle $x \in D \Rightarrow f(x)$ linksgekrümmt.
- Grenzwerte: die Funktion besitzt keine Polstellen. Es ist

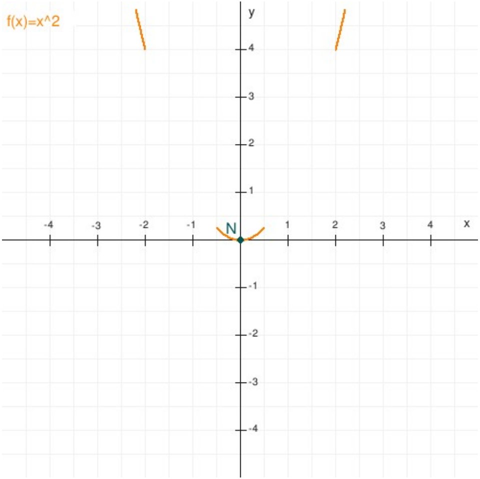
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Kurvendiskussion



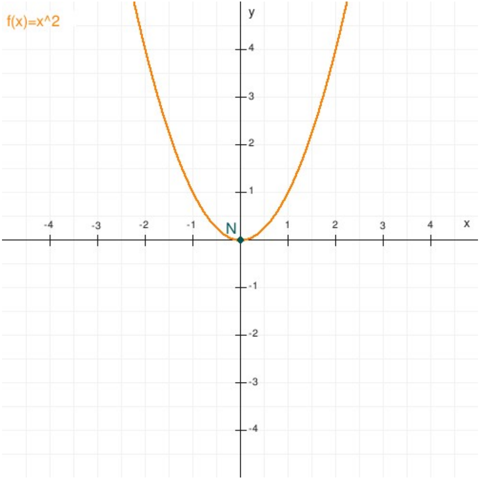
- Nullstelle
- Minimum
- Krümmung

Kurvendiskussion



- Nullstelle
- Minimum
- Krümmung
- Grenzwerte

Kurvendiskussion



- Nullstelle
- Minimum
- Krümmung
- Grenzwerte
- Skizze!

Beispiel: ausführliche Kurvendiskussion:

Untersuchung der Funktion

$$\frac{x}{x^2+1}.$$

- Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$
- Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
- Extrema: es ist

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}.$$

Notwendige Bedingung für eine Extremstelle (f ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar) ist $f'(x) = 0$, also

$$-x^2+1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

- Zweite Ableitung:

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - (-x^2+1)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{-2x(x^2+1) + (x^2-1)\cdot 4x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3},$$

also

$$f''(1) = \frac{-4}{2^3} = -\frac{1}{2} \qquad < 0 \Rightarrow 1 \text{ ist Maximalstelle mit } f(1) = \frac{1}{2}$$

$$f''(-1) = \frac{4}{2^3} = \frac{1}{2} \qquad > 0 \Rightarrow -1 \text{ ist Minimalstelle mit } f(-1) = -\frac{1}{2}$$

Kurvendiskussion

- Wendestellen:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow x^3 = 3x$$

$$x = 0 \text{ oder } x = \pm\sqrt{3}$$

  Man kann nachrechnen, dass $f^{(3)}(x)$ an diesen Stellen $\neq$ Null ist, also sind 0 und $\pm\sqrt{3}$ Wendestellen mit $f(0) = 0$ und $f(\pm\sqrt{3}) = \pm\sqrt{3}/4$.
- Für $x \to \infty$ ist $f''(x) > 0$. Das Vorzeichen der Ableitung ändert sich an den Wendestellen, also:
  - für $x > \sqrt{3}$ ist $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ linksgekrümmt,
  - für $0 < x < \sqrt{3}$ ist $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ rechtsgekrümmt,
  - für $-\sqrt{3} < x < 0$ ist $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ linksgekrümmt,
  - für $x < -\sqrt{3}$ ist $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ rechtsgekrümmt.

Kurvendiskussion

- Grenzwerte: die Funktion besitzt keine Polstellen. Es ist

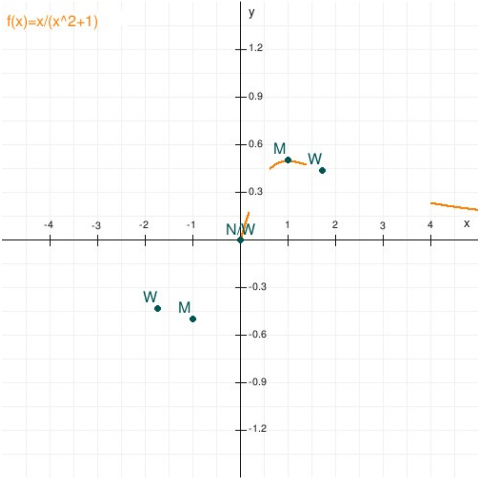
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$

- Symmetrie:

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x}{x^2 + 1} = -f(x)$$

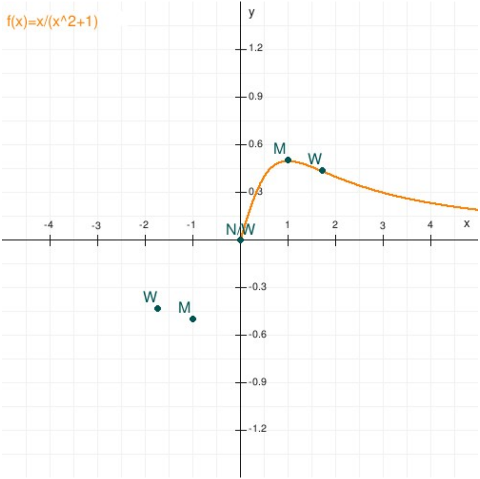
Die Funktion ist ungerade.

Kurvendiskussion



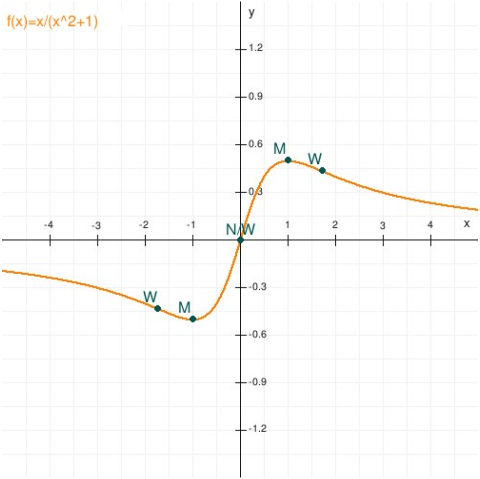
- Nullstelle
- Minimum/Maximum
- Wendestellen
- Krümmung
- Grenzwerte

Kurvendiskussion



- Nullstelle
- Minimum/Maximum
- Wendestellen
- Krümmung
- Grenzwerte
- Skizze

Kurvendiskussion



- Nullstelle
- Minimum/Maximum
- Wendestellen
- Krümmung
- Grenzwerte
- Skizze
- Symmetrie