Mathe 2

Corona - Notversion

M. Oettinger

15. April 2020

Definition: (Folge)

Eine Abbildung $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{C}, n \mapsto a_n$ heißt Folge. Man schreibt dafür $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ein einfaches Beispiel für eine Folge ist $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$, die Größe $\frac{1}{n}$ wird als Folgenglied zu n bezeichnet. Folgen lassen sich natürlich grafisch darstellen:

- als Funktionsgraph
- oder auch auf eine Zahlengeraden

Definition: (Konvergenz)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent gegen den Grenzwert a* ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$), wenn

für alle $\varepsilon > 0$ gilt: für alle großen n ist $|a_n - a| < \varepsilon$

Andernfalls heißt die Folge *divergent*

Die Menge $U_\varepsilon(a) = \{x||a-x| < \varepsilon\}$ wird als ε-Umgebung von a bezeichnet. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ bedeutet, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein N existiert, so dass für alle $n \geq N a_n$ in der ε-Umgebung $U_\varepsilon(a)$ ist.

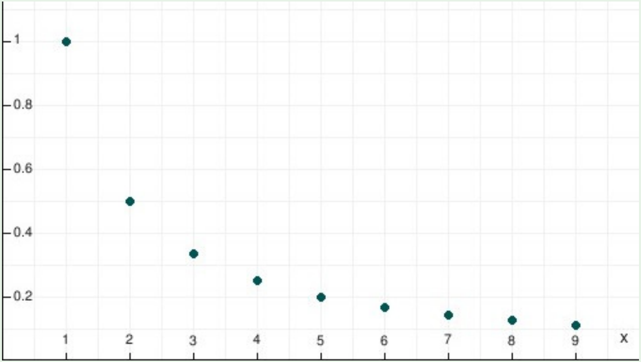
Eine Folge mit Grenzwert 0 heißt *Nullfolge*.

Folgen

Einfache Folge

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

denn sei $\varepsilon > 0$ fest gewählt, dann gilt für $n > \frac{1}{\varepsilon}$, dass $\frac{1}{n} < \varepsilon$.



Folgen

Satz:

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien zwei konvergente Folgen mit den Grenzwerten a und b. Dann gilt:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a$ für $\lambda \in \mathbb{C}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, $b > 0$

Aus der Konvergenz einer Summe oder eines Produkts kann allgemein nicht auf die Konvergenz der einzelnen Folgen geschlossen werden.

Beispiel:

Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ und $b_n = -a_n$ sind jeweils nicht konvergent

$$(-1, 1, -1, 1, -1 \dots)$$

aber $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = a_n + b_n = 0$ ist konvergent gegen den Grenzwert 0.

Einige wichtige Grenzwerte für Folgen:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = 0 \quad$ für jedes $a > 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad$ für jedes $a > 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \quad$ für jedes $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot q^n = 0 \quad$ für jedes $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ und
  $\lim\limits_{n^a\to\infty} n \cdot q^n = 0$ für jedes a.

Reihen

Definition:

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zahlen und $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ deren n-te Partialsumme. Dann bezeichnet die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die durch Summation der a_k entsteht.
Konvergiert die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so heißt die Reihe konvergent, andernfalls heißt die Reihe divergent.
Gilt $s_n \to \infty$ für $n \to \infty$, so schreibt man auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$.

Anmerkungen:

- die Bezeichnung des Index ist nicht relevant:
- Man kann sich die a_k als eine Folge von Einzelschritten vorstellen, die Partialsumme entspricht der Summe der zurückgelegten Schritte.
- Konvergenz einer Reihe bedeutet dann anschaulich, dass die Schritte sich verkleinern, die Folge 'kommt zur Ruhe'.

Beispiel: Einfache Reihen

$a_k = \frac{1}{2^k}$:

$$\begin{array}{cccccc}
k & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\
a_k & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \dots \\
s_1 & = \frac{1}{2} & & & & \\
s_2 & = \frac{1}{2} & + \frac{1}{4} & & & = \frac{3}{4} \\
s_3 & = \frac{1}{2} & + \frac{1}{4} & + \frac{1}{8} & & = \frac{7}{8}
\end{array}$$

$a_k = (-1)^{k+1}$, also $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 1, \dots$.
Dann ist $s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, \dots$ - man kommt nicht zur Ruhe, die Reihe divergiert.

Reihen

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ heißt *geometrische Reihe*. Es gilt

$$
\begin{aligned}
(1-q)\cdot\sum_{k=0}^{n} q^k &= \\
(1-q)\cdot(1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n) &= 1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n \\
&\quad -(q+q^2+q^3+\ldots+q^n+q^{n+1}) \\
&= 1-q^{n+1}
\end{aligned}
$$

Damit wird durch die Glieder

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

eine Folge von Partialsummen definiert.

geometrische Reihe

Die Folge der Partialsummen ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$s_1 = \sum_{k=0}^{1} q^k = q^0 + q^1 = \frac{1-q^2}{1-q} = 1$$

$$s_2 = \sum_{k=0}^{2} q^k = q^0 + q^1 + q^2 = \frac{1-q^3}{1-q}$$

$$s_3 = \sum_{k=0}^{3} q^k = q^0 + q^1 + q^2 + q^3 = \frac{1-q^4}{1-q}$$

$$\vdots$$

Falls $|q| < 1$, gilt im Grenzwert für große n

$\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ und damit für die Folge der Partialsummen

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1/(1-q)$. Daraus folgt:

Satz:

Die geometrische Reihe konvergiert für $|q| < 1$ mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}. \tag{1}$$

Beispiel: Anwendung der geometrischen Reihe:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \text{mit} \quad \left|\frac{1}{2}\right|<1$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k-1=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1=1$$

Teleskopsumme

ein weiteres Beispiel: wir betrachten die Summe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-k}\text{ , also } a_k = \frac{1}{k^2-k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=2}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$die Summe konvergiert mit $\sum_{k=2}^{\infty} a_k = 1.$

Konvergenz

Die Summe wird als *Teleskopsumme* bezeichnet, weil sie sich wie ein Teleskop zusammenschieben lässt.

Damit die Summe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, müssen die Folgenglieder a_k (die Einzelschritte der Summe) gegen Null gehen. Die Umkehrung gilt aber nicht unbedingt: falls die Folgenglieder gegen Null gehen, muss die Reihe nicht automatisch konvergieren.

Bei der harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ konvergieren die Summanden $\frac{1}{k}$ gegen Null. Schreibt man die Reihe aber aus

$$\begin{aligned}
&1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16}+\ldots\\
\geq &1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}}_{\frac{1}{2}}+\ldots+\ldots\\
= &1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots
\end{aligned}$$

so sieht man, dass die Folge der Partialsummen unbeschränkt ist. Die harmonische Reihe $\sum 1/k$ konvergiert also nicht.

Bedeutung

Die geometrische Reihe lautet

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad |x| < 1$$

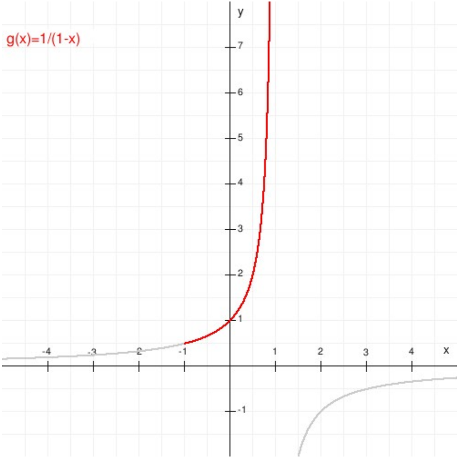
Für die Variablenwerte, für die sie konvergiert, sind die beiden Seiten identisch, also ist für $|x| < 1$ die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Die unendliche Summe ist eine weitere Darstellung der Funktion $f(x)$.

Bedeutung

Für $|x| < 1$ im rot markierten Bereich kann $f(x)$ als Reihe dargestellt



werden!

Rechnen mit Reihen

Satz: (Rechenregeln für Reihen)

Es seien $\sum_k a_k = a$ und $\sum_k b_k = b$ konvergente Reihen, dann gilt:

$$\sum (a_k \pm b_k) = a \pm b$$

Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt: $\sum \lambda \cdot a_k = \lambda \cdot a$

Satz: (Vergleichskriterium)

$$\text{Ist } b_k \geq 0, \sum_k b_k \text{ konvergent und } |a_k| \leq b_k \text{so ist auch } \sum_k a_k \text{ konvergent.} \tag{2}$$

(Majorantenkriterium)

$$\text{Ist } b_k \geq 0, \sum_k b_k = \infty \text{ und } a_k \geq b_k, \text{ so ist auch } \sum_k a_k = \infty \tag{3}$$

(Minorantenkriterium)

Beispiel: zum Vergleichskriterium

Es gilt

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2 - k},$$

wir hatten bereits gezeigt, dass $\sum_k \frac{1}{k^2-k}$ konvergiert. Damit folgt sofort die Konvergenz von

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Satz:

1. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a} \text{ ist für } a > 1 \text{ konvergent und für } a \leq 1 \text{ divergent.}$$

2. $$\sum_{k=1}^{\infty} k^a \cdot q^k \text{ ist für } |q| < 1 \text{ und jedes } a \text{ konvergent}$$

3. Sind p und q zwei Polynome, so gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p(k)}{q(k)} \text{ konvergiert} \iff$$

der Grad des Polynoms q ist um mindestens 2 größer als der Grad von p.

Definition: (Potenzreihe:)

Ein Ausdruck der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

heißt *Potenzreihe*.

Eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ist die Verallgemeinerung eines Polynoms (einer endlichen Reihe) $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

Beispiel: (Potenzreihen)

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1: \text{ geometrische Reihe.}$$

Spezielle Potenzreihen

Manche Funktionen lassen sich über Potenzreihen berechnen - die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ hat für Berechnungen zwei gewaltige Nachteile. Sie lässt sich aber einfach als Potenzreihe berechnen:

Satz: (Eulersche Zahl und Exponentialfunktion)

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \quad \text{, insbesondere ist} \tag{4}$$

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad \text{die Eulersche Zahl} \tag{5}$$

Spezielle Potenzreihen

Die Eulersche Zahl $e = 2,718281828459\ldots$ ist eine transzendente reelle Zahl. Sie ist die Basis des natürlichen Logarithmus und der natürlichen Exponentialfunktion und spielt in der Infinitesimalrechnung eine wichtige Rolle.

Die Reihe der Exponentialfunktion konvergiert für alle $x \in \mathbb{C}$, Einsetzen von komplexen Werten $z \in \mathbb{C}$ in die Potenzreihe liefert eine Definition für e^z.

Aus der Potenzreihe der Exponentialfunktion erhält man die Potenzreihen von Sinus und Kosinus:

$$e^{ix} = \frac{1}{0!}\cdot 1 + \frac{1}{1!}(ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \dots$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{0!}\cdot 1 + i\frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + -i\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots \\
&= \frac{1}{0!}\cdot 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots \\
&+ i\left(\frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots\right)
\end{aligned}$$

Spezielle Potenzreihen

Mit der Euler-Formel: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} \qquad (6)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} \qquad (7)$$

Analog die Potenzreihen für cosh und sinh:

$$
\begin{aligned}
\cosh x &= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \\
&= \left[\left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots\right) + \left(1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \ldots\right)\right] \\
&= 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \cdot x^{2k} \qquad (8)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\sinh x &= x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Spezielle Potenzreihen

Zusammenfassung: spezielle Potenzreihen

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k}$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \cdot x^{2k}$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}$$

Zusammenfassung: spezielle Potenzreihen

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad (|x| < 1)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot x^k \qquad (|x| < 1)$$

Rechnen mit Potenzreihen

Beispiel: Rechnen mit Reihen

Kennt man eine Potenzreihe, so lassen sich daraus oft weitere Potenzreihen ableiten.

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1+(-x^2)+(-x^2)^2+(-x^2)^3+\ldots = 1-x^2+x^4-x^6+\ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \text{ falls } |x| < 1$$

Anmerkungen

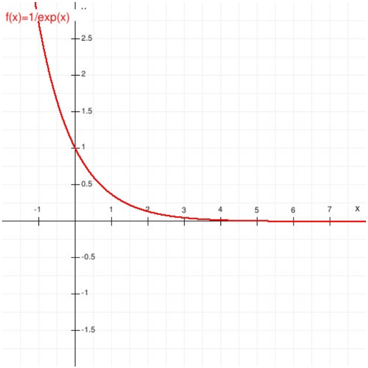
- Bricht man die Potenzreihe nach einigen Gliedern ab, so erhält man eine gute Näherung für die Funktion bei kleinem Argument x, beispielsweise

$$e^x \approx 1 + x, \qquad \sin x \approx x, \qquad \cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$$

- Eine Potenzreihenentwicklung $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ist

$$\begin{aligned} \text{ungerade} \iff \quad & a_{k=2n} = 0 \text{ (es treten nur ungerade } x\text{-Potenzen auf)} \\ \text{gerade} \iff \quad & a_{k=2n+1} = 0 \text{ (es treten nur gerade } x\text{-Potenzen auf)} \end{aligned}$$

Grenzwerte



Die Abbildung zeigt die Funktion $f(x) = \frac{1}{e^x}$, die sich wie eine Folge für $x \to \infty$ an die x-Achse annähert. Funktionen können Grenzwerte besitzen.

Definition:

Sei $f(x)$ eine Funktion der Variablen x.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y \Leftrightarrow \text{für jede Folge } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$$

$$\text{und } x_n \text{ aus dem Definitionsbereich von } f \text{ gilt } f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} y.$$

Falls $x_0 \in \mathbb{R}$ und nur Folgen $x_n > x_0$ zugelassen sind, schreibt man

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = y \text{ und analog für} x_n < x_0 \lim_{x\to x_0-} f(x) = y.$$

Dabei schreibt man bei reellem Definitions- bzw. Zielbereich auch $x_0 = \pm\infty$ bzw. $y = \pm\infty$.

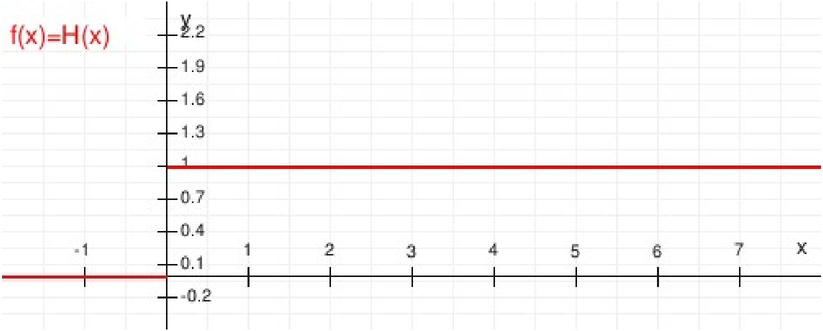
Beispiel:

1. $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}, x \longmapsto x^2, x_0 = 2$. Es ist $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$, denn für jede Folge $x_n \to 2$ gilt offensichtlich $x_n^2 \to 4$.
2. (Heaviside-Funktion)

$$\text{Sei } H : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}, x \to \begin{cases} 0, & \text{falls } x \le 0 \\ 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0} H(x)$ existiert nicht, denn sei $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, dann gilt $x_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$.
$(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} = (0; 1; 0; 1; 0; 1; 0; \dots)$ besitzt aber keinen Grenzwert.
Es ist allerdings $\lim\limits_{x \to 0+} H(x) = 1$ und $\lim\limits_{x \to 0-} H(x) = 0$.

Grenzwerte



Grenzwerte

Der Grenzwert x_0 muss nicht im Definitionsbereich der Funktion f liegen, wohl aber die Folgenglieder x_n.

Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longmapsto \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$$

Für den $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ betrachten wir eine Folge $(x_n)_{x \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \neq 0$ und $x_n \to 0$. Die bereits bekannten Potenzreihenentwicklungen können für solche Grenzwertbetrachtungen hilfreich sein:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \ldots\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Auch für Grenzwerte können einige häufige Fälle angegeben werden:

Satz:

- Für $Q > 1$ und alle a gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{Q^x}{x^a} = \infty \tag{10}$$

(Merkregel: 'Q^x wächst schneller als jede Potenz von x')

- Für $|q| < 1$ und alle a gilt

$$\lim_{x\to\infty} q^x x^a = 0 \tag{11}$$

Satz:

- Für jedes $a > 0$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0 \text{ und } \lim_{x\to 0+} x^a \ln x = 0 \tag{12}$$

  'Der Logarithmus wächst langsamer als jede Potenz von x'.

- Sind p und q Polynome mit den führenden Koeffizienten a_p und a_q, dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{falls } \mathrm{Grad}(q) > \mathrm{Grad}(p), \\ \frac{a_p}{a_q} & \text{falls } \mathrm{Grad}(p) = \mathrm{Grad}(q), \\ \text{Vorzeichen } \frac{a_p}{a_q} \cdot \infty & \text{falls } \mathrm{Grad}(p) > \mathrm{Grad}(q). \end{cases} \tag{13}$$

Bestimmung von Grenzwerten

Beispiel:

1. $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x x^3 = 0 \qquad \text{nach (11)}$$

2. $$\lim_{x\to-\infty} 2^x x^2 = \lim_{x\to\infty} 2^{-x}(-x)^2 = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x x^2 = 0 \qquad \text{nach (11)}$$

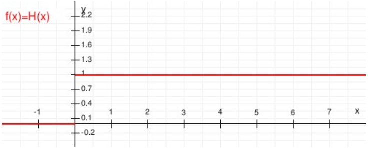
Definition: (Stetigkeit)

Eine Funktion f heißt stetig in $x_0 \in D$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Eine Funktion f heißt stetig, wenn sie in allen $x_0 \in D$ stetig ist.

Anschaulich bedeutet die Stetigkeit einer Funktion, dass sie in ihrem gesamten Definitionsbereich D eindeutig definiert ist und keine Lücken oder Sprünge enthält.



Beispiel:

Die Heaviside-Funktion ist definiert als

$$H : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}, x \to \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0 \\ 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}.$$

Sie ist nicht stetig in 0. H ist aber stetig in allen $x_0 \neq 0$.
$f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}, x \longmapsto |x|$ ist stetig.

Stetigkeit

Satz:

Alle 'normalen' Funktionen sind stetig (Polynome, Exponential-, Wurzel-, trigonometrische Funktionen).

Satz: (Nullstellensatz)

Sei $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ stetig. Ist $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (oder umgekehrt), so gibt es ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = 0$.

Nullstellen

Bestimmung von Nullstellen mit dem Bisektions- oder Intervallhalbierungsverfahren:
Gesucht: eine Nullstelle der Funktion $f(x)$. Es sei $f(a) < 0, f(b) > 0$.
Bestimme

$$w := f \underbrace{\left(\frac{a+b}{2}\right)}_{\text{Intervallmittelpunkt}}$$

- ist $w \geq 0$, so liegt die Nullstelle in $[a, \frac{a+b}{2}]$.
- ist $w < 0$, so liegt die Nullstelle in $[\frac{a+b}{2}, b]$.

Iteration führt zu Werten, die sich immer besser an den tatsächlichen Wert der Nullstelle annähern.

Nullstellen

Beispiel:

$$f(x) = x^3 + x - 1 : f(0) < 0, f(1) > 0 \Longrightarrow \text{ Nullstelle in } [0;1]$$
$$f(0,5) = -0,375 \Longrightarrow \text{ Nullstelle in } [0,5;1]$$
$$f(0,5) \approx 0,172 \Longrightarrow \text{ Nullstelle in } [0,5;,0,75]$$
$$\ldots$$